4/3/21

Ρίζες: Έστω $w \in \mathbb{C}^*$, δηλ. $w = re^{i\theta}$, $\theta \in \arg w \subseteq \mathbb{R}$, $r>0$.
Θέλουμε να βρούμε όλα τα $z \in \mathbb{C}$ με $z^n = w$ όπου $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ [αυτά τα z ονομάζονται n-οστές ρίζες του w]. Θέτουμε $z = \rho e^{i\varphi}$, $\varphi \in \arg z \subseteq \mathbb{R}$ και αποδεικνύουμε ότι $z \neq 0 \iff \rho > 0$. Άρα έχουμε $z^n = w \iff \rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$

$$\Rightarrow \underbrace{\rho^n = r}_{\iff \rho = \sqrt[n]{r}} \wedge \; e^{in\varphi} = e^{i\theta} \iff n\varphi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$n\varphi, \theta \in \mathbb{R}$

[αφού $e^{i\theta} = e^{i\theta} e^{i2k\pi} = e^{i(\theta+2k\pi)}$]
[-"- $e^{in\varphi} = e^{in\varphi} e^{-i2k\pi} = e^{i(n\varphi - 2k\pi)}$] ← SOS

$$\Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \wedge \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$$

Έχουμε για $\boxed{z_k := \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}}$
ότι $z_k^n = w$ (και ότι άλλο z με $z^n = w$ $\nexists$)

Διαπιστώνουμε ότι για $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1,\dots,n-1\}$ λαμβάνουμε κάποιο από τα $\boxed{z_k,\ k = 0,1,\dots,n-1}$

Έστω ένα $k_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1,\dots,n-1\}$ Τότε $\exists\, m_0 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $k_0 = k + m_0 \cdot n$ με $k \in \{0,1,\dots,n-1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_{k_0} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k_0\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2(k+m_0 n)\pi}{n}} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\, \underbrace{e^{i\frac{2m_0 \cancel{n}\pi}{\cancel{n}}}}_{=1} = z_k$$

Τώρα αφού είδαμε ότι δεν υπάρχουν παραπάνω ρίζες από τις

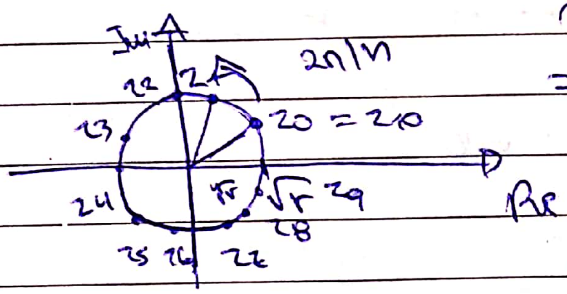
$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k=0,\dots,n-1$$

ας δούμε αν αυτές είναι διαφορετικές. Όλο αυτά τα διαφορετικά βρίσκονται

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \underbrace{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}}_{=z_0}\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k=0,\dots,n-1$$

$\Rightarrow z_1 = z_0 e^{i\frac{2\pi}{n}}$, δηλ. z_1 = στροφή του z_0 κατά $\frac{2\pi}{n}$

$z_2 = z_0 e^{i2(\frac{2\pi}{n})} = z_1 \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{n}}}_{=\cos(\frac{2\pi}{n})+i\sin(\frac{2\pi}{n})}$ = στροφή του z_1 κατά $\frac{2\pi}{n}$



(Εδώ: $n=10$)

...

$z_{n-1} = z_0 e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}$ = στροφή του z_0 κατά $(n-1)\frac{2\pi}{n}$

$z_n = z_0 e^{i n\cdot\frac{2\pi}{n}} = z_0$ = στροφή κατά $n\cdot\frac{2\pi}{n} = 2\pi$

Φυσικά όλα τα παραπάνω ισχύουν και για $\theta = Arg\,w$. Άρα η $z^n = w \in \mathbb{C}^*$ έχει τις εξής ρίζες:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{Arg\,w + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

(διαφορετικές μεταξύ τους, άλλες δεν υπάρχουν). Διακρίνουμε την z_0 και έχουμε μία συνάρτηση $w \mapsto z_0$ δηλ. $\forall w \in \mathbb{C}^*: w \mapsto \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{Arg\,w}{n}} =: \sqrt[n]{w}$

[Προσοχή: δεν λέμε ότι το w έχει μία n-οστή ρίζα, απλώς διακρίναμε (ξεχωρίζουμε) μία από τις n διαφορετικές ρίζες w]

Αυτή την καλώς ορισμένη συνάρτηση την ονομάζουμε συνάρτηση n-οστής ρίζας:

$$\sqrt[n]{\cdot} : z \mapsto \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{Arg\,z}{n}}, \quad n \in \mathbb{C}^*, \quad \sqrt[n]{0} := 0$$

(για την οποία φυσικά ισχύει: $(\sqrt[n]{z})^n = z$ (αλλά δεν είναι η μόνη)

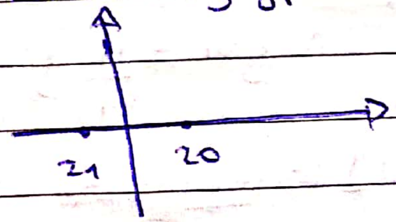
Επίσης: $z_k = \sqrt[n]{z}\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$
Είναι όλες οι διαφορετικές του $z \in \mathbb{C}^*$

Παραδείγματα: 1) Έστω $w = 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Τότε οι $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ διαφορετικοί αριθμοί $z_k = \underbrace{\sqrt[n]{1}}_{= \underbrace{\sqrt[n]{|1|}}_{=1} e^{i\frac{Arg\,1}{n}} = 1 \ (Arg\,1 = 0)} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$

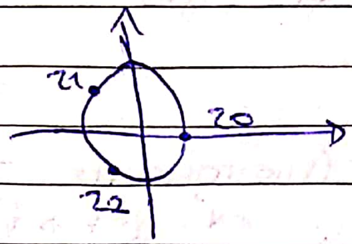
Είναι οι ρίζες του $z^n = 1$

π.χ. για $n = 2$: $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$

[και πράγματι $1^2 = (-1)^2 = 1$]



Για $n=3$: $z_0 = \sqrt[3]{1} = 1$, $z_1 = z_0 e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = z_0 e^{i\frac{4\pi}{3}} =$
$= z_0 e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{-i2\pi} =$
$= z_0 e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$



2) Γενικά έστω $w \in \mathbb{C}^*$. Τότε η $z^2 = w$ έχει τις ρίζες
$z_0 = \sqrt[2]{w} =: \sqrt{w}$ και $z_1 = \sqrt{w} \cdot \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{2}}}_{= e^{i\pi} = -1}$

Δηλ. $z_0 = \sqrt{w}$ και $z_1 = -\sqrt{w}$ όπου $\sqrt{w} := \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{Arg w}{2}}$

[Δηλ. οι ρίζες της $z^2 = w$ είναι οι $z = \pm \underbrace{\sqrt{w}}_{:= \sqrt[2]{w}}$
(εννοούμε την εικόνα της κύριας της τετραγωνικής ρίζας)

π.χ.: $w = -1$: $z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-1} = \pm\sqrt[2]{-1} =$
$= \pm\sqrt{|-1|}\, e^{i\frac{Arg(-1)}{2}} = \pm e^{i\frac{Arg(-1)}{2}} = \pm e^{i\frac{\pi}{2}}$

Δηλαδή η $z^2 = -1$ έχει τις ρίζες $z = \pm e^{i\frac{\pi}{2}} =$
$= \pm\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \pm i$ όπου $\sqrt{-1} = \sqrt[2]{-1} = i$

Και πράγματι έτσι ορίσαμε τους μιγαδικούς:
$(\pm i)^2 = i^2 = -1$]

Παρατήρηση: Να προσεχθεί ότι η συνάρτηση $\sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$ έχει τιμές στο σύνολο $\{w \in \mathbb{C}^* : -\frac{\pi}{n} < Arg w \leq \frac{\pi}{n}\}$

αφού $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{Arg z}{n}}$ $(=: w)$ $\left[Arg w = \frac{Arg z}{n}\right]$ με $Arg z \in (-\pi, \pi] \Rightarrow \frac{Arg z}{n} \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$